Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

Ecole des Hautes Etudes Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1978

Composition de Mathématiques

2e EPREUVE

Mercredi 24 Mai 1978, de 8 heures à midi

Dans tout le problème, P est un plan affine réel ; $\vec{P}$ est le plan vectoriel associé ; on note (A, B, M...) des points de P, $(\vec{AB}, \ldots)$ des vecteurs de $\vec{P}$. Dans la troisième partie, $\| \ \|$ est une norme euclidienne sur P.

PREMIÈRE PARTIE

1° Si $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de $\vec{P}$, montrer que $(\vec{BC}, \vec{BA})$ et $(\vec{CA}, \vec{CB})$ sont des bases de $\vec{P}$.

2° Soit A' (resp. B', C') le milieu de BC (resp. CA, AB). Montrer que $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$ est une base de $\vec{P}$. Quelle est la matrice de changement de base de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ à $(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})$?

3° Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, et M le barycentre de $(A(\alpha), B(\beta), C(\gamma))$.

Calculer $(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ et que M soit barycentre de $(A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma'))$. (On exprimera α' en fonction de α seul.)

4° On considère les suites de points (A_n, B_n, C_n), de nombres $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, définis par $A_0 = A$ (resp. $B_0 = B$, $C_0 = C$), $A_1 = A'$ (resp. $B_1 = B'$, $C_1 = C'$), A_{n+1} (resp. B_{n+1}, C_{n+1}) étant le milieu de B_nC_n (resp. C_nA_n, A_nB_n), $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ et telles que M soit barycentre de $(A_n(\alpha_n), B_n(\beta_n), C_n(\gamma_n))$. Déterminer une application f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_{n+1} = f(\alpha_n), \quad \beta_{n+1} = f(\beta_n), \quad \gamma_{n+1} = f(\gamma_n).$$

Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ soit indépendant de n ; interprétation géométrique. En déduire $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ en fonction de n et de (α, β, γ) : on exprimera, d'une part α_n en fonction de n et de α seul, puis α_n sous la forme $\alpha_n = \alpha u_n + (\beta + \gamma) v_n$, où (u_n) et (v_n) sont deux suites ne dépendant que de n.

5° Retrouver les résultats précédents en démontrant l'existence des suites (u_n) et (v_n), en donnant des relations permettant de calculer (u_{n+1}, v_{n+1}) en fonction de (u_n, v_n), puis en calculant, par la méthode de diagonalisation, la matrice $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$. *(Tous les calculs doivent figurer sur la copie.)*

6° a) Retrouver les résultats précédents en calculant H^n en fonction de (u_n, v_n), où $H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$: explicitant d'abord le lien entre $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, (α, β, γ) et H^n, on déterminera l'équation caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice H dans la base canonique, puis on exhibera une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1} H P$; on montrera alors comment en déduire H^n. *(Ce dernier calcul n'est pas demandé.)*

b) Calculer H^n d'une autre manière en posant $E = H + 2I$, en calculant E^n pour $n \geqslant 1$, puis en explicitant H^n comme combinaison linéaire de E et de I.

.../...

DEUXIÈME PARTIE

1° Déterminer les coordonnées (x, y) du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de (α, β, γ).

2° Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on se donne $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathbb{R}^3$ avec $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0$; si M_i est le barycentre de $(A(\alpha_i), B(\beta_i), C(\gamma_i))$, *montrer que les points* (M_1, M_2, M_3) appartiennent à une même droite si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3° Dessiner une figure formée de dix points, A, B, C, S, Q, R, I, J, K, M, deux à deux distincts de P, tels que *les ensembles suivants* $\{A, R, B\}$, $\{A, Q, C\}$, $\{A, M, S\}$, $\{R, M, J, C\}$, $\{Q, M, I, B\}$, $\{K, B, S, C\}$, $\{R, I, S\}$, $\{Q, J, S\}$, $\{K, R, Q\}$ soient inclus chacun dans une droite différente.

4° M étant barycentre de $(A(\alpha), B(\beta), C(\gamma))$, montrer que chacun des neuf autres points est barycentre de *(A, B, C) affectés de coefficients dépendants de* (α, β, γ) que l'on déterminera de manière aussi simple que possible (sans que leur somme, non nulle, soit nécessairement égale à 1). On donnera les résultats sous la forme d'un tableau :

M	A	B	C	S	Q	R	I	J	K
α									
β									
γ									

5° Montrer que I J K sont alignés.

TROISIÈME PARTIE

1° On pose $a = \|\overrightarrow{BC}\|$, $b = \|\overrightarrow{CA}\|$, $c = \|\overrightarrow{AB}\|$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (α, β, γ) pour que M se projette orthogonalement en A' sur BC.

2° Retrouver ainsi, en déterminant explicitement (α, β, γ) en fonction de (a, b, c), l'existence et l'unicité d'un point M commun aux médiatrices de BC, CA et AB.

3° Si M est, de nouveau, un point quelconque de P, calculer $\|\overrightarrow{MA}\|^2$ en fonction de $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$. Retrouver ainsi la condition du 1°.

4° Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b, c) pour que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, où M est le point déterminé au 2°. Interprétation géométrique.

REMARQUE : Les trois parties du problème sont totalement indépendantes. Les notations des 1°, 2° et 3° de la Première Partie sont utilisées dans tout le problème.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail